1. 集合 $\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ に対して

$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\quad\left(=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\right)$$

を (n 次元) ユークリッド距離という．このとき, 次で与えられた 2 点の間のユークリッド距離を求めよ．

(a) $x=(-1,2), y=(3,-5)$.
(解答例)

$$d_2(x,y)=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-5))^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}.$$

(b) $x=(3,0,-2,1), y=(2,3,-4,5)$.
(解答例)

$$d_2(x,y)=\sqrt{(3-2)^2+(0-3)^2+(-2-(-4))^2+(1-5)^2}=\sqrt{1+9+4+16}=\sqrt{30}.$$

(c) $x=(0,-4,6,3,-3), y=(-1,4,3,-2,-2)$.
(解答例)

$$\begin{aligned}d_2(x,y)&=\sqrt{(0-(-1))^2+(-4-4)^2+(6-3)^2+(3-(-2))^2+(-3-(-2))^2}\\&=\sqrt{1+64+9+25+1}=\sqrt{100}=10.\end{aligned}$$

(d) $x=2, y=-3$.
(解答例)

$$d_2(x,y)=\sqrt{(2-(-3))^2}=\sqrt{25}=5.$$

2. 3 点 $x=(2,0,6,t,-1), y=(-2,1,7,-4,5), z=(5,2,0,-3,1)$ について, x は y,z からユークリッド距離に関して等距離な位置にある．このとき, t の値を求めよ．
(解答例) 距離 $d_2(x,y), d_2(x,z)$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}d_2(x,y)&=\sqrt{(2-(-2))^2+(0-1)^2+(6-7)^2+(t-(-4))^2+(-1-5)^2}=\sqrt{(t+4)^2+54}\\d_2(x,z)&=\sqrt{(2-5)^2+(0-2)^2+(6-0)^2+(t-(-3))^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(t+3)^2+53}\end{aligned}$$

である．題意より $d_2(x,y)=d_2(x,z)$ であるから $(t+4)^2+54=(t+3)^2+53$ が成り立つ．これを解いて $t=-4$.

3. 集合 $X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_2((0,0),(x,y))<1\right\}$ を図示せよ．
(解答例) $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して $d_2((0,0),(x,y))=\sqrt{x^2+y^2}$ である． したがって $(x,y)\in X$ であることと $\sqrt{x^2+y^2}<1$ であることは同値, さらに $x^2+y^2<1$ であることと同値である． よって描くべき図形は境界を除いた, 原点中心で半径 1 の円である．(図は省略)

4. 集合 $\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|)$$

と定める．これを便宜上, d_1 距離と呼ぶことにする．このとき, 次で与えられた 2 点の間の d_1 距離を求めよ．

(a) $x = (-1, 2), y = (3, -5)$.
(解答例)

$$d_1(x, y) = |-1 - 3| + |2 - (-5)| = 4 + 7 = 11.$$

(b) $x = (3, 0, -2, 1), y = (2, 3, -4, 5)$.
(解答例)

$$d_1(x, y) = |3 - 2| + |0 - 3| + |-2 - (-4)| + |1 - 5| = 1 + 3 + 2 + 4 = 10.$$

(c) $x = (0, -4, 6, 3, -3), y = (-1, 4, 3, -2, -2)$.
(解答例)

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |0 - (-1)| + |-4 - 4| + |6 - 3| + |3 - (-2)| + |-3 - (-2)| \\ &= 1 + 8 + 3 + 5 + 1 = 18. \end{aligned}$$

(d) $x = 2, y = -3$.
(解答例)

$$d_1(x, y) = |2 - (-3)| = 5.$$

5. 3 点 $x = (2, 0, 6, t, -1), y = (-2, 1, 7, -4, 5), z = (5, 2, 0, -3, 1)$ について, x は y, z から d_1 距離に関して等距離な位置にある．このとき, t の値を求めよ．
(解答例) 距離 $d_1(x, y), d_1(x, z)$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |2 - (-2)| + |0 - 1| + |6 - 7| + |t - (-4)| + |-1 - 5| = |t + 4| + 12 \\ d_1(x, z) &= |2 - 5| + |0 - 2| + |6 - 0| + |t - (-3)| + |-1 - 1| = |t + 3| + 13 \end{aligned}$$

である．題意より $d_1(x, y) = d_1(x, z)$ であるから $|t + 4| + 12 = |t + 3| + 13$ が成り立つ．これを解いて $t = -3$.

6. 集合 $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_1((0, 0), (x, y)) < 1\right\}$ を図示せよ．
(解答例) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $d_1((0, 0), (x, y)) = |x| + |y|$ である．したがって $(x, y) \in X$ であることと $|x| + |y| < 1$ であることは同値．よって描くべき図形は境界を除いた, 4 点 $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ で囲まれた正方形である．(図は省略)